

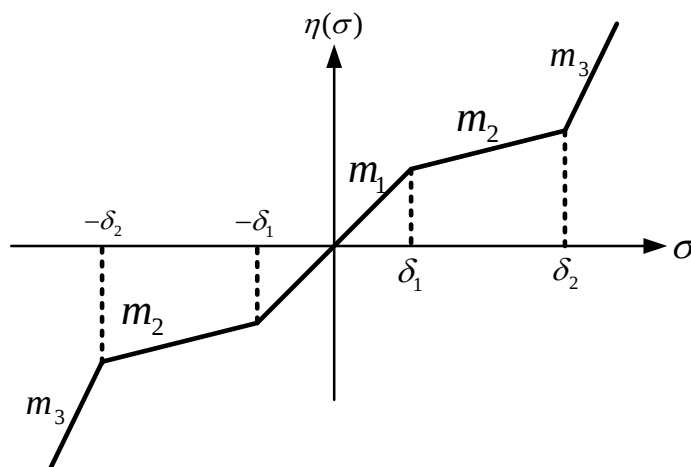
اصول کنترل غیر خطی

امتحان پایانی



۱- الگوی حلقه بسته و داده‌های زیر را در نظر بگیرید.

الف) رابطه‌ای بین m_1 ، m_2 ، δ_1 و δ_2 ارائه دهید که در صورت تحقق آن، سیکل حدی بوجود می‌آید؟
راهنمایی: از تابع توصیفی المان غیرخطی زیر استفاده کنید.



$$\eta(a) = (m_1 - m_2)f\left(\frac{\delta_1}{a}\right) + (m_2 - m_3)f\left(\frac{\delta_2}{a}\right) + m_3$$

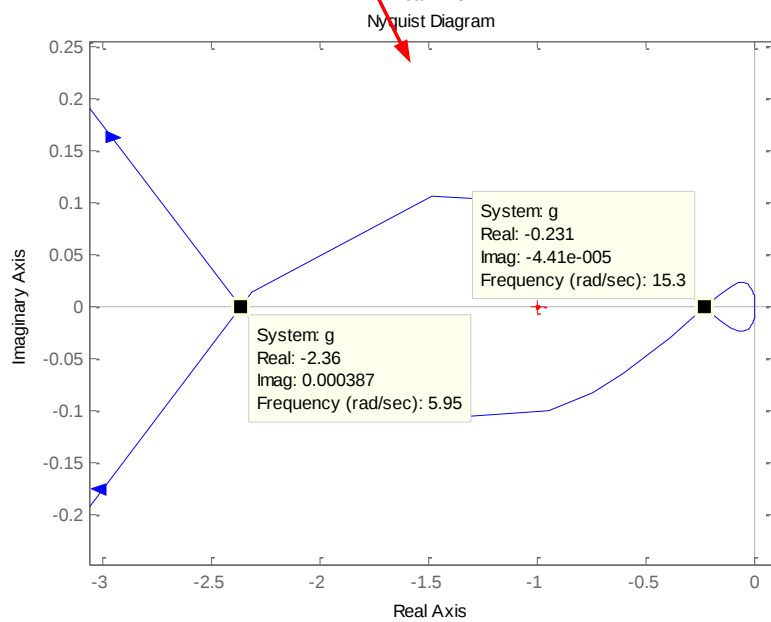
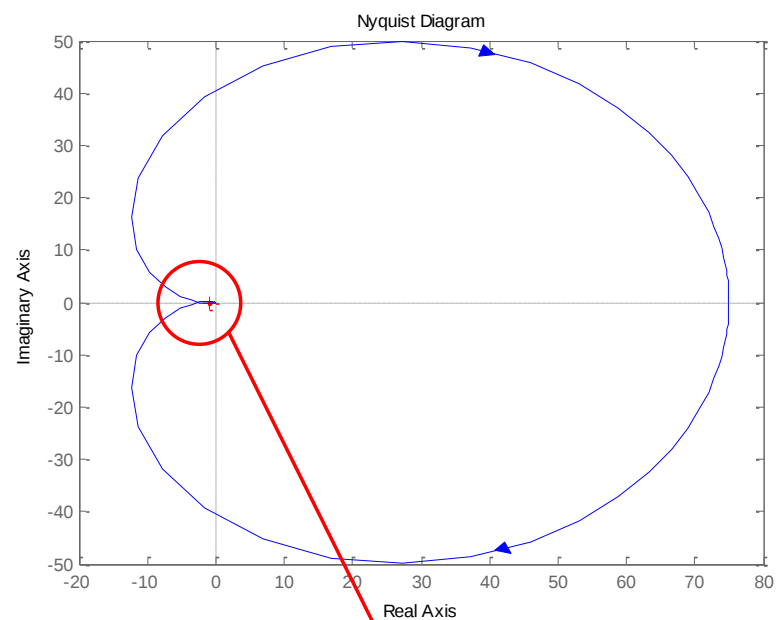
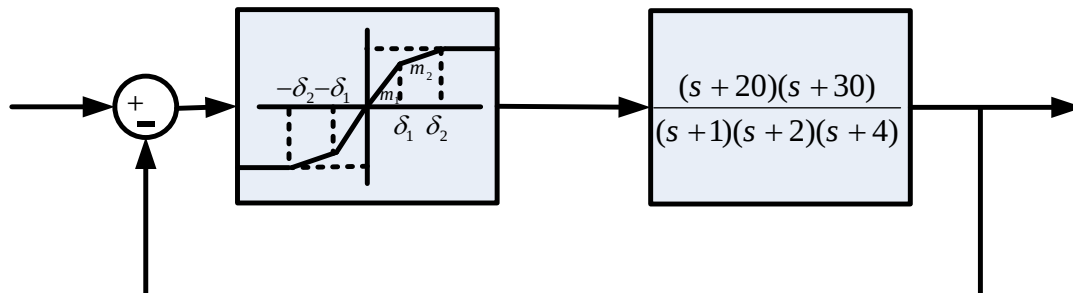
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 1 \\ \frac{2}{\pi} [\sin^{-1}(x) + x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}] & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ب) استدلال کنید که رابطه تقریبی $\frac{m_1\delta_1 + m_2(\delta_2 - \delta_1)}{\delta_2} > \frac{1}{2.36}$ نیز قابل استفاده است و با الهام از همین

روش تقریبی، منحنی تقریبی تابع توصیفی عنصر غیرخطی را رسم کنید.

ج) تحت شرط بالا، بگویید از وجود چند سیکل حدی مطمئن خواهید بود و چه شرطی (تقریبی) باید برقرار باشد تا تعداد آنها بیشتر گردد.

د) تحت شرایطی که بیشترین تعداد سیکل حدی ممکن بوجود می‌آید، در مورد فرکانس، پایداری و دامنه (تقریبی) هر یک از سیکل‌های حدی، اظهار نظر نمایید. برای دامنه، از همان روش تقریبی در ب داده شده، استفاده کنید. (مقادیر پارامترها را $m_1 = 8$ ، $m_2 = 4$ ، $\delta_1 = 1$ و $\delta_2 = 2$ در نظر بگیرید)



۲- سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1 = (x_2 - 1)x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_1^4}{(1+x_1^2)^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2}$$

الف) نقاط تعادل سیستم را بیابید.

ب) نشان دهید که تابع $V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$ کاندیدای مناسبی برای تابع لیاپانوف است.

ج) در مورد نوع پایداری حول نقطه‌ی تعادل مبدا بحث کنید.

۳- در تمرین شماره‌ی ۱ درس توانستیم مدل یک پاندول را بدست آوریم. اکنون با حذف t و حل معادله‌ی دیفرانسیل بین x_1 و x_2 ، رابطه‌ی تحلیل صفحه فاز را بیابید. سپس با استفاده از بسط مک لورن، تابع مثلثاتی درون معادله را با یک معادله درجه دوم تقریب زده و صفحه فاز را به طور تقریبی رسم کنید. با رسم صفحه‌ی فاز و استفاده از تعریف پایداری، رفتار حول نقطه تعادل را شرح دهید.

راهنمایی: مدل پاندول به قرار زیر است:

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin x_1 \end{cases}$$